数理解析研究所講究録
493巻 1983年 164-178

Jacobian 問題に対する境界障害

東工大 理 岡 睦雄

§1. 問題提起.

Kを ch K = 0 なる代数閉体とし，2つのK-係数の多項式 $f(X,Y)$ と $g(X,Y)$ が Jacobian 条件

(1.1). $J(f,g) \equiv f_X g_Y - f_Y \cdot g_X = 1$

を満していると仮定する．次の予想は Jacobian 予想と呼ばれる。

予想I. 上の条件下で，X, Y は f, g の多項式である.

そのような例としては，次の変換の有限合成で得られる基本変換がある.

(i) (線型変換) $(X', Y') = (aX+bY+e,\ cX+dY+e')$

但し，$ad-bc \neq 0$

(ii) $(X', Y') = (X,\ Y+h(X))$, h: 多項式。

基本変換に対し，予想は正しいのは自明。Jung の定理によって，上の予想は次の様にも述べられる。

予想II. 同上の下で，(f, g) は基本変換である。

この予想に関して，いろいろな部分的結果があるが，その中で特筆すべきは，Abyankar の結果である。

定理（[Ab]）．(f, g) が (1.1) を満す時，$m = \text{degree}\ g$ とすれば，g の m 次斉次部分 $g_m(X, Y) = 0$ は高々2つの根をもつ．

従って，予想II は次の予想と同値。（後述）

予想III．与えられた m 次の多項式が，$g_m(X, Y) = 0$ の根を2つもつとき，$J(f, g) = 1$ なる多項式 f は存在しない。

この草稿の目的は，与えられた g に対し，g の Newton 多角形がある条件（境界から障害）をみたせば，予想III が正しい事を示す事である。残念ながら，境界条件のみでは，矛盾に到らないものが存在する。（§6，注意IV）．Abyankar の定理の別証明も与える。

§2．擬斉次有理函数と Jacobian 問題

この章では Jacobian 問題を，有理函数について考える。

定義（2.1）．多項式 $f(X, Y)$ が $(a, b ; d)$ 型擬斉次多項式とは，任意の $t \in \mathbb{K}$ に対し，$f(t^a X, t^b Y) = t^d f(X, Y)$ が成立する時をいう。但し、$ab \neq 0$ なら，a, b は互に素な整

数，$ab=0$ なら，$(a,b)=(0,1)$ か $(1,0)$ と仮定。

例1. $X^pY^q(XY+1)$ は，$(1,-1;p-q)$型.

(a,b) を重さ，dを次数と呼ぶ。有理函数 $F(X,Y)=\dfrac{f(X,Y)}{g(X,Y)}$ が，$(a,b;d)$型擬斉次有理函数とは，f, g が共に (a,b) を重さにもつ擬斉次多項式で，$d=\deg_{(a,b)}f-\deg_{(a,b)}g$ の時をいう。この時 $F(X,Y)$ は Euler 方程式：

(2.2). $\quad d\cdot F(X,Y)=a\cdot X\cdot F_X(X,Y)+bYF_Y(X,Y)$

を満す.

補題(2.3). F, G が (a,b)を重さとする擬斉次有理函数で $J(F,G)=0$ なるものとする。その時 $\exists c\in K$ で，$F^{\deg G}=c\cdot G^{\deg F}$ となる.（[Ab], (17.4)).

補題(2.4). F が (a,b) 型なら，一意的に次の形の因数分解がある：$F(X,Y)=c\cdot X^pY^q\prod_{i=1}^{t}(X^b+c_iY^a)^{\nu_i}$

定義(2.5) X, Y, $X^b+c_iY^a$ etc をFの因子．$p=\mathrm{val}_XF$, $q=\mathrm{val}_YF$, $\mathrm{val}_{l_i}F=\nu_i$ $(l_i: X^b+c_iY^a)$ で表わす。

次の補題はこの論文の鍵となる。

補題(2.6) $F(X,Y)$ を擬斉次有理函数，lを X, Y or X^b+cY^a $(c\neq 0)$ のいずれかとし，$\mathrm{val}_lF=0$ で，$d=\deg_{(a,b)}F\neq 0$ とする。この時 $J(l,F)$ は l で割れない. i.e. $\mathrm{val}_lJ(l,F)=0$.

証明. $l=X^b+cY^a$ のとき示す.（残りも同様.）

$F(X,Y) = X^p Y^q \prod_{i=1}^{m} (X^b + c_i Y^a)^{n_i}$ とする．仮定より．

(*) $d = pa + qb + \sum n_i \cdot ab \neq 0$ ， $c \neq c_i$ $(i=1,\cdots,m)$.

$J(\ell, X^b + c_i Y^a) = (c_i - c)\, ab X^{b-1} Y^{a-1}$ etc. を使って直接計算すると，

$$J(\ell, F)\Big|_{\ell=0} = d \prod (c_i - c)^{n_i} X^{p+b-1} Y^{na} \neq 0.$$

すなわち，$\mathrm{Val}_\ell J(\ell, F) = 0$。 q.e.d

この補題に依って，次の Abyankar の定理を証明しよう。

定理(2.7) $h(X,Y)$ を $(a,b;d)$ 型の擬斉次多項式とし，$a \geqq b \geqq 0$ とする．このとき $J(\phi, h) = 1$ なる擬斉次有理函数が存在する為の必要十分条件は，次の通り。

(i) $h = \ell_1^p \ell_2^q$ で，ℓ_1, ℓ_2 は線型型式，$p \neq q$．あるいは，

(ii) $h = c \cdot Y^p (X + c' Y^a)^q$， $a \geqslant 2$, $c, c' \neq 0$, $p \neq q$.

((18.9)～(18.12), [Ab] 参照．)

証明 $h = X^{\alpha_1} Y^{\alpha_2} \ell_3^{\alpha_3} \cdots \ell_k^{\alpha_k}$ ， $\ell_i = X^b + c_i Y^a$ とする。ϕ の存在を仮定し，$\phi = X^{\beta_1} Y^{\beta_2} \ell_1^{\beta_1} \cdots \ell_k^{\beta_k} \cdots \ell_{k+t}^{\beta_{k+t}}$ としよう。上の表現で，当然 $\alpha_1, \alpha_2 \geqq 0$， $\alpha_i > 0$ $(i \geqq 3)$ と仮定できる。まず次を示そう。

補題(2.7.1) 1) $\alpha_i + \beta_i \geqq 1$ if $\alpha_i > 0$

2) $\beta_i \geqq 0$ if $\alpha_i = 0$.

まず，ℓ を $\mathrm{Val}_\ell h = 0$ なる因子とする．$\beta = \mathrm{val}_\ell \phi \geqq 0$ を示せばよい。仮に $\beta < 0$ として，$\phi = \ell^\beta \cdot \phi'$ とかくと，

$J(h, \phi) = J(h, l) \cdot \beta l^{\beta-1} \cdot \phi' + J(h, \phi') l^{\beta} = 1$

補題(2.6) より，才1項の val_l は丁度 $\beta-1$，才2項は β 以上．従って，$0 = \beta-1 < 0$ なる矛盾に到る。

次に，l_i $(\alpha_i > 0)$ をとる。$\psi_i = \phi^{\alpha_i} h^{-\beta_i}$ を考える。

<u>Case 1</u>. $\deg \psi_i = \alpha_i \cdot \deg \phi - \beta_i \cdot d = 0$ のとき，仮定より $\deg \phi = a+b-d$ だから，$\frac{\beta_i}{\alpha_i} = \frac{\deg \phi}{d} = \frac{a+b}{d} - 1 > -1$．従って，$\alpha_i + \beta_i > 0$ を得る．

Case 2. $\deg \psi_i \neq 0$ であれば，$J(\psi_i, h) = \alpha_i \phi^{\alpha_i - 1} h^{-\beta_i}$ より，$val_{l_i} J(\psi_i, h) = \beta_i(\alpha_i - 1) - \beta_i \alpha_i$ であるが一方補題(2.6)を再び使えば，$J(\psi_i, h) = J(\psi_i, l_i) \alpha_i l_i^{\alpha_i - 1} (h/l_i^{\alpha_i})$ $+ J(\psi_i, h/l_i^{\alpha_i}) l_i^{\alpha_i}$ より，$-\beta_i = \alpha_i - 1$ q.e.d.

さて (2.7.1) によって，次の不等式を得る．

(2.7.2) $$a+b = \deg \phi + \deg h \geqq (\alpha_1+\beta_1)a + (\alpha_2+\beta_2)b + (k-2)ab$$

(I) $k=2$ とする．その時 $h = X^{\alpha_1} Y^{\alpha_2}$。$\alpha_1 \neq \alpha_2$ であれば，$J(X^{1-\alpha_1} Y^{1-\alpha_2}, X^{\alpha_1} Y^{\alpha_2}) = (\alpha_2 - \alpha_1)$ より，$\frac{1}{(\alpha_2-\alpha_1)} X^{1-\alpha_1} Y^{1-\alpha_2}$ が求める解．$\alpha_1 = \alpha_2$ の時．$\alpha_1 > 0$ だが．I の補題と不等式により $\phi = c \cdot X^{1-\alpha_1} Y^{1-\alpha_2}$ の形．しかし，その場合 $J(\phi, h) = 0$ となって，不可能。

(II) $k=3$．(2.7.2) と仮定 $a \geqq b \geqq 0$ より，$b=1$ かつ $\alpha_1 = 0$ か，$\alpha_2 = 0$。$b=1$ かつ $\alpha_2 = 0$ のとき，$a = 1$ とな

り，$h = X^{\alpha_1} l_3^{\alpha_3}$，$l_3$：線型 となり，(I)と同じ結論を得る。$b=1$，$\alpha_1 = 0$ のとき，$h = Y^{\alpha_2}(X + c_3 Y^a)^{\alpha_3}$ となり，$\phi = cY^{1-\alpha_2}(X + c_3Y^a)^{1-\alpha_3}$ とすれば，$\alpha_2 \neq \alpha_3$ なら解が得られる。$\alpha_2 = \alpha_3$ なら，$J(\phi, h) = 0$ となり解は存在しない。

(III) $k=4$ のとき。(2.7.7) より $a=b=1$ で，$\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ を得る。$h = l_3^{\alpha_3} l_4^{\alpha_4}$ で l_i は線型だから，(I)に帰着。これで，定理の証明を終る。

§3. ニュートン多面体とJacobian問題

多項式 $f(X, Y) = \sum a_{\nu\mu} X^\nu Y^\mu$ に対し，$N(f)$ を $a_{\nu\mu} \neq 0$ なる (ν, μ) の張る凸多面体とし，ニュートン多面体と呼ぶ。$N(f)$の境界上の1-単体（又はその頂点）で，原点と一直線上にないものを考え，それらの和を $\partial N(f)$ で表わす。$\Delta \in \partial N(f)$ に対し，$f_\Delta(X, Y) = \sum_{(\nu,\mu)\in\Delta} a_{\nu\mu} X^\nu Y^\mu$ とする。$\dim \Delta = 1$ ならば，一意的に $(a, b; d)$ が存在して，f_Δ は $(a, b; d)$型（$d > 0$）となる。(f, g) を $J(f, g)$なる多項式とする。(a, b)を固定した weights とする。f, g の対応する gradation を $f = \sum_{-n'}^{n} f_i$，$g = \sum_{-m'}^{m} f_m$ とかく。$J(f_i, g_j)$ は type $(a, b; i+j-a-b)$ になる事より，$J(f, g)$ の gradation は，

(3.1). $$J(f, g)_k = \sum_{i+j=k+a+b} J(f_i, g_j).$$

特に，$J(f, g) = 1$ より

(3.2) $J(f_n, g_m) = 0$ if $n+m \neq a+b$.

今 $g_m = h^e$ $(e > 0)$ と書き，h は多項式の巾でないとできる。$r = \deg_{(a,b)} h$. $\mathcal{R}_{(a,b)}$ を，有限個の (a,b) を重さとする擬斉次有理函数の和で表せる有理函数の全体とする.

命題(3.3). 任意の自然数 N に対し，$\hat{g} \in \mathcal{R}_{(a,b)}$ が存在して，$\deg(g - \hat{g}^e) < -N$ とできる. 又，その様な $\hat{g}$ に対し，$\check{g} \in \mathcal{R}_{(a,b)}$ が存在して，$\deg(1 - \hat{g}\check{g}) < -N$ なるものが存在する。

証明. $\hat{g} = \hat{g}_r + \hat{g}_{r-1} + \cdots + \hat{g}_{-M}$ とおき，$\hat{g}_r = h$. 以下上から $\hat{g}^e = g$ を解けばよい. 又 $\check{g}$ に関しては $\check{g}_{-r} = h^{-1}$ とおき，$\hat{g}\check{g} = 1$ を上から順次とき，適当な所でやめればよい。

定理(3.4)（境界障害） 同上の記号で，擬斉次有理函数 ϕ が存在して，$J(\phi, g_m) = 1$ となる.

証明. $n+m = a+b$ なら，$J(f_n, g_m) = 1$ となり，自明. $n+m > a+b$ ならば，$J(f_n, g_m) = 0$ だが，補題(2.3)と，h が巾-自由(square-free)より，$f_n = c_q h^q$ $(q = n/r)$ とかける. $f^{(q)} = f - c_q \hat{g}^q \in \mathcal{R}_{(a,b)}$ とすれば，

$J(f^{(q)}, g) = 1 +$ lower degree が命題(3.3)と容易な計算によって，チェックできる。$\deg f^{(q)} < \deg f$ であるから，$f^{(q)}$ の最高次を考えて，同様の操作をつづけられる。

従って，s を　$sr > a+b-m$　なる最小の s とすれば，常数 $c_q, \ldots\ldots, c_s$ があって，$f^{(s)} = -\sum_{i=s}^{q} c_i \hat{g}^i + f$ とすれば（但し，$i<0$ のとき，$\hat{g}^i$ は $\hat{g}^{-i}$ と思う．）(1) $\deg f^{(s)} < sr$
(2) $J(f^{(s)}, g) = 1 + (\text{lower degrees})$ と書ける。s の仮定より，$\deg f^{(s)} = a+b-m$ で，$(f^{(s)})_{a+b-m} = \phi$ とすれば，$J(\phi, g_m)$ が成り立つ。q.e.d.

系 (3.5) $\forall\Delta \in \partial N(g)$ に対し，$\exists\phi \in R_\Delta$ で $J(\phi, g_\Delta) = 1$ なるものがある。（ただし，$R_\Delta = R(a_\Delta, b_\Delta)$，$(a_\Delta, b_\Delta)$ は Δ の重さ）．

系 (3.6) $\Delta \in \partial N(g)$ が正の重さをもてば，g_Δ は，定理 (2.7) の形（あるいは X と Y をとりかえた）に限る。

§4．予想Ⅲ $\Leftrightarrow$ 予想Ⅱ

予想Ⅱから，予想Ⅲは自明であるから，予想Ⅲを仮定して，予想Ⅱを示そう。(f, g) を $J(f, g) = 1$ なる多項式対とする。$m = \text{degree } g$ として，m に関する帰納法で示す．
$m=1$ なら，座標変換で．$g = Y$ としてよく，このとき，
$J(f, g) = f_X = 1$　i.e.　$f = X + \varphi(Y)$，φ：多項式となり o.k.　$m > 1$ ならば，g_m（m 次斉次部分）は Y^m と仮定してよい。$N(g)$ を考えて，$(0, m)$ を端にもつ 1-単体を Δ とし，その重さを (a, b) とすれば，定理 (2.7) と定理 (3.4) によって，$g_\Delta = cY^p(X + c'Y^a)^q$ となる．（$b=1$，$m = p+aq$）．

従って，$X'=X+c'Y^a$，$Y'=Y$ なる座標変換を行えば，あきらかに，$\deg g(X',Y')<m$ となって，帰納法の仮定より証明を終る．

§5. 負の重さをもつ擬斉次多項式（有理函数）の場合．

この章では，§2 で扱わなかった場合を扱う。すなわち $h(X,Y)$ を monomial でない擬斉次多項式で，その重さ (a,b) が $a\cdot b\leqq 0$ の時を考える。$d=\deg_{(a,b)} h$．

(I) $(a,b)=(1,-1)$ (or $(-1,1)$) の時は特別なので，先に扱う。$h(X,Y)$ は $X^pY^q\prod_{i=1}^{t}(XY+c_i)^{\nu_i}$ と因数分解される．$p\neq q$ i.e $d=p-q\neq 0$ なら，$\phi=cXY/h$ として解が得られる事は $J(\phi,h)=J(XY,h)\dfrac{c}{h}=(q-p)c$ より明らか。$p=q$ の時は，ϕ が存在するとすれば，$\phi=(XY)^{\rho}\cdot\prod(XY+d_j)^{\mu_j}$ とかけるが，その時 $J(\phi,h)=0$ となるので不可能。すなわち，

定理(5.1) $(a,b)=(1,-1)$ の時，$d\neq 0$ の時，又その時に限って，ϕ が存在して，$J(\phi,h)=1$ となる。

(II) 以下 $(a,b)\neq(1,-1)$ の場合を考える。

仮定(5.2) $a\geqq 0>b$，$(a+b)\cdot d>0$，$d<0$

$h(X,Y)$ は多項式であるから，$N(f)$ は線分である．その両端を $P=(\alpha,\beta)$，$Q=(\alpha',\beta')$ $(\alpha<\alpha')$ とする。

$$\pi(X,Y) = X^{\alpha} Y^{\beta} \prod_{i=1}^{k} (X^{|b|} Y^{a} + c_i)^{\nu_i} = X^{\tilde{\alpha}} Y^{\beta} \prod (Y^{a} + c_i X^{b})^{\nu_i}$$

とする．($\tilde{\alpha} = \alpha - \sum \nu_i b$)．$\phi$ の存在を仮定して，

$\phi = c_0 X^{\gamma} Y^{\delta} \prod_{i=1}^{k+t} (X^{|b|} Y^{a} + c_i)^{\mu_i}$ とする．

主張：$\nu_i + \mu_i \geq 1$ とくに，$\phi\pi$ は Laurent 多項式。

この証明は (2.7.1) の証明と全く同様にできる。(省略)．

今 $\psi = \phi\pi$ とおくと，ψ は Laurent 多項式で $J(\psi, \pi) = \pi$ をみたす。$N(\psi)$ の左端を $P' = (\varepsilon, \delta)$ 右端を (ε', δ') とする。(1, 1) を通り，$\overline{PQ}$ に平行な直線を L とすれば，$\deg_{(a,b)} \psi = a+b$ より，P', Q' は L 上にある事は自明．L と OP，OQ の交点を各 P'', Q'' とする。

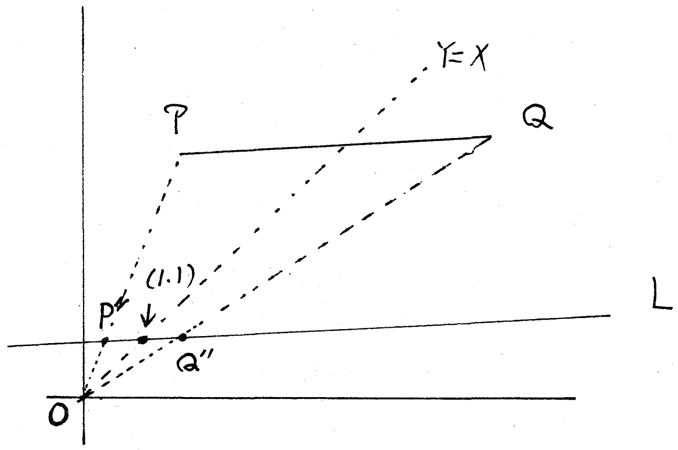

Figure 1.

P' が P'' でなければ，$J(\psi, \pi) = \pi$ で，$J(XY, X^{\alpha}Y^{\beta}) = (\beta - \alpha) X^{\alpha} Y^{\beta}$ である事より，$P' = (1, 1)$．又 P' が P'' と一致する為には，P'' が整数点である事が必要。Q' に対しても同様の事がいえる。又．$\psi = c_0 X^{\alpha+\gamma} Y^{\beta+\delta} \prod_{i=1}^{k+t} (X^{|b|} Y^{a} + c_i)^{\nu_i + \mu_i}$

で，$k+l \geqq k \geqq 1$ である事より．$P' = Q' = (1, 1)$ になる事は不可。特に，$\alpha' < \beta'$ のとき，Q'' は整数点にはなりえない。（Figure 2）

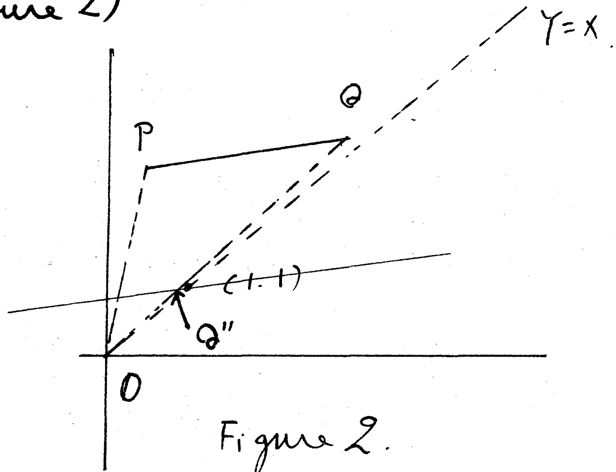

Figure 2.

又 P'' が整数点となるのは，$a=0$ で，P が Y 軸 (i.e. $\alpha=0$) の時に限る。この時 $h = Y^{\beta} \prod_{i=1}^{k} (X+c_i)^{\nu_i}$ となるが，$Q' = (1, 1)$ なので，$k=1$ でなければ不可能。すなわち，

定理 (5.2) $a \geqq 0 > b$，$(a+b)\alpha > 0$，$\alpha < 0$ のとき，(i) $\alpha' < \beta'$ の時，$a = \alpha = 0$，$k = 1$ の時，又その時に限って，$J(\phi, h) = 1$ は解をもつ．

(ii) $\alpha' > \beta'$ のときは，Q'' が整数点 i.e. $\exists s \in \mathbb{N}$ で，

$(1+sa)\alpha' = (1-sb)\beta'$ なるものが存在することが必要条件となる。

注意I. (ii) の時．Q'' が整数点だけでは十分条件でない。例えば，$h(X, Y) = X^{\alpha} Y^{\beta} (X^{|b|} Y^{a} + c_1)^{\nu_1} (X^{|b|} Y^{a} + c_2)^{\nu_2}$ で，$(1+2a)\alpha' = (1-2b)\beta'$ （$\alpha' = \alpha + (\nu_1+\nu_2)|b|$，$\beta' = \beta + (\nu_1+\nu_2)a$）と仮定する．この時，

$$(\nu_1 c_1 + \nu_2 c_2)\begin{vmatrix} 1-2b, & 1+2a \\ \alpha'+b, & \beta'-a \end{vmatrix} + (c_1 + c_2)\begin{vmatrix} 1-b, & 1+a \\ \alpha', & \beta' \end{vmatrix} = 0$$

の時に限り、ϕ が存在し，$\phi = c_0 XY(X^{|b|}Y^a + c_1)(X^{|b|}Y^a + c_2)$ である。

注意II. $(a+b)d < 0$ の場合は，定理の証明中の主張：$\nu_i + \mu_i \geqq 1$ が成立しないので，更に複雑である。例えば，$h(X,Y) = X(X^3Y^2 + c_1)^2$ $(a=2, b=-3, d=2)$ のとき，$\phi = -3X^2Y(X^3Y^2 + c_1)^{-3}(X^3Y^2 + 3c_1)$ が解。

§6. 境界障害.

(f, g) を $J(f, g) = 1$ なる多項式の対とし，基本変換でないと仮定しよう。そのとき，適当な座標変換をくりかえせば，$m = \mathrm{degree}(g)$ で，$g_m = X^p Y^q$ $(p > q > 0)$ と仮定できる．定理(2.7)より，$N(g)$ は長方形 OPQR の中に入らなければいけない。

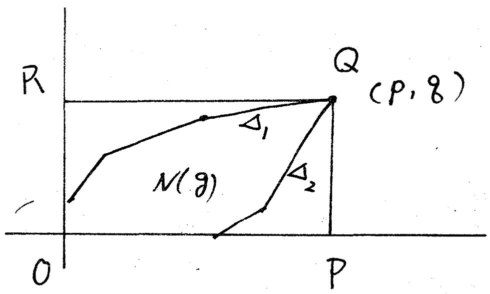

Figure 3

この章では，§5 の結果を，$N(g)$ の条件として，翻訳しよう。まず，補題(2.3)と，(3.2)より，

補題(6.1) f, g が定数項を含むと仮定すると，$N(f)$ と

$N(g)$ は相似.

次に Δ_1, Δ_2 を Figure 3 の中の 1-単体とする。$R \notin N(g)$ と仮定する.(これは $X' = X + c_1$, $Y' = Y$ の形の座標変換で, いつでもできる.) $(a_i, b_i; d_i)$ を Δ_i の重さとすれば,

$-a_1 \geqq 0 > -b_1$, $(a_1 + b_1) d_1 > 0$. 又. $p > q$.

より, 定理 (5.2) は次の事をいみする.

定理. (6.2). (1) $s_1 \in N$ が存在して, $(1 + s_1 |a_1|) q = (1 + s_1 b_1) p$.

(2) $a_2 > 0 > b_2$, $a_2 + b_2 \leqq 0$.

注意 III. $J(f, g) = 1$ なる g は当然 K^2 から K^2 への写像として, 臨界点をもたないが, その逆は正しくない。たとえば, $g = X + \sum_{i=1}^{K} c_i (X^a Y^b)^i$ $(a \geqq 2, b \geqq 1)$ は臨界点もたないが, $J(f, g) = 1$ なる f を持たない。なぜなら g が基本変換の片割れでない事は自明だし, $N(g)$ の $(1, 0)$ と (ka, ka) を端とする 1-単体は明らかに, 障害をもつから。

(6.3): 一般に, $J(f, g) = 1$ で, $g_m \sim X^p Y^q$ $(p + q = m,$ $p > q > 0)$ の時. $N(g) \ni (0, 1), (1, 0)$.

なぜなら, f, g のいずれかは X, Y の独立な一次項を含み, $N(f)$ と $N(g)$ は相似であるから。

注意. IV. 定理 (6.2) や (3.5) は $\exists N(g)$ の各単体に関す

る障害をのべたが，$\partial N(g)$ の全体の構造よりくる．障害もあるので今それをのべる．degree $g = m$，$g_m = X^pY^q$ $(p>q>0)$ を仮定し，各 $\Delta \in \partial N(g)$ に対し，$g_\Delta = h_\Delta^{e_\Delta}$ と書く．ただし，h_Δ は square-free で，$e_\Delta \geq 1$ なる整数。$\{e_\Delta\}_{\Delta\in\partial N(g)}$ の最大公約数 を $e(g)$ とする。

<u>定理(6.4) $e(g) > 1$.</u>

<u>証明</u>「各 $\Delta \in \partial N(g)$ に対し，(6.1) によって対応する $N(f)$ の単体を Δ' とする。(3.2) より $f_{\Delta'} = c_\Delta \cdot h_\Delta^{a_\Delta}$ とかけ，$a_\Delta \cdot \deg_\Delta h_\Delta = \deg_{\Delta'} f_{\Delta'}$．$n$ を f の次数とすれば，$a_\Delta = \deg_\Delta h_\Delta^{-1} \cdot \deg_{\Delta'} f_{\Delta'} = \frac{n}{m}\cdot e_\Delta$．これより，$e_\Delta$ は m_1 の約数である。ただし，$n/m = n_1/m_1$，$(n_1, m_1)=1$．従って，$e(g)=1$ を仮定すれば，$m_1 = 1$．i.e. $m \mid n$ を得る。しかしながらこれは古典的議論より矛盾：$f - c\cdot g^{\frac{n_1}{m_1}} = f - cg^{n_1}$ を f' とすれば，$J(f', g)=1$ で，$\deg f' < \deg f$．有限回で矛盾に到る．

<u>例</u> $g = X + XY^2 \Rightarrow e(g)=1$ で，相棒の f は存在しない。

<u>例</u> $g = X^n(X^2Y+1)^{3n} + X^{2n}(XY+1)^{4n} - X^{6n}Y^{4n}$.

$e(g)=n$ で，$\partial N(g)$ は，境界上には，障害がない。ただし，g は沢山の臨界点をもつ。

<u>筆者は</u>，<u>境界上の局所</u>，<u>大域いずれの障害も持たず，か</u>

つ、臨界点をもたない，多項式 $g(X, Y)$ の例で，基本変換の相棒でないものを知らない。詳細は[O]を見てほしい．

文献

[Ab] S.S. Abhyankar, Expansion techniques in Algebraic Geometry, Tata Inst. Fundamental research 1977.

[J]. H.W.E. Jung : Über ganze birationale Transformationen der Ebene, J. Reine Angew. Math. 184 (1942), 161–174.

[B-C-W] H. Bass, E.H. Connell, D. Wright : The jacobian conjecture, Bull. Amer. Math. Soc. Vol. 7, 1982, 287–330

[O] M. Oka, On the boundary obstructions to the Jacobian problem, 準備中.